Bemerkung zur Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

1. D. E. MENCHOFF [1]) und H. RADEMACHER [2]) haben bewiesen, daß aus der Bedingung

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty \tag{1}$$

die Konvergenz der Orthogonalreihe

$$\sum a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall fast überall folgt.

In dieser Note beweisen wir mit einer kleinen Modifikation der Beweisführung von D. E. MENCHOFF und H. RADEMACHER die folgende Behauptung:

Satz. *Unter der Bedingung*

$$\sum \log n \cdot a_n^2 \log \frac{1}{a_n^2} < \infty \quad {}^{3}) \tag{3}$$

konvergiert die Reihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall.*

Bemerkungen. Aus (1) folgt (3) offensichtlich, und man kann leicht eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ angeben, derart, daß (3) erfüllt wird, (1) aber nicht. Weiterhin sind (1) und (3) für eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge gleichwertig.

2. Die Behauptung folgt aus dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Es sei* $\{c_n\}_1^N$ *eine endliche Folge von Null verschiedenen Zahlen. Dann gilt*

$$\int_0^1 \left(\max_{1 \leq k \leq N} |c_1 \varphi_1(x) + \cdots + c_k \varphi_k(x)| \right)^2 dx \leqq C \log N \sum_{k=1}^{N} c_k^2 \log \frac{c_1^2 + \ldots + c_N^2}{c_k^2}$$

---

[1]) D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82–105.

[2]) H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112–138.

[3]) In den Fällen $\frac{1}{a^2} < 2$ und $a = 0$ soll man $\log \frac{1}{a^2}$ durch 1 ersetzen.

für jedes im Intervall [0, 1] *orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}_1^N$, *wobei* $C>0$ *eine absolute Konstante bedeutet.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $c_1^2+\ldots+c_N^2=1$ vorausgesetzt werden. Es seien $\sigma_0(x)\equiv 0$, $\sigma_1(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_N\varphi_N(x)$, $\sigma_{00}(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{n_1}\varphi_{n_1}(x)$ und $\sigma_{01}(x)=c_{n_1+1}\varphi_{n_1+1}(x)+\ldots+c_N\varphi_N(x)$, wobei n_1 folgenderweise definiert wird: Sei m die kleinste natürliche Zahl mit $c_1^2+\ldots+c_m^2\geqq\frac{1}{2}$; ist $m<N$, dann setzen wir $n_1=m$; im entgegengesetzten Fall sei $n_1=\mu$, wobei μ die größte natürliche Zahl mit $c_1^2+\ldots+c_\mu^2<\frac{1}{2}$ bedeutet; endlich, im Falle $N=1$ setzen wir $\sigma_{00}(x)\equiv\sigma_{01}(x)\equiv 0$. Dann sei $\nu_1=[n_1/2]$ und $\nu_2=[(n_1+N)/2]$ [4]) und wir setzen

$$\sigma_{000}(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{\nu_1}\varphi_{\nu_1}(x),\quad \sigma_{001}(x)=c_{\nu_1+1}\varphi_{\nu_1+1}(x)+\ldots+c_{n_1}\varphi_{n_1}(x),$$

$$\sigma_{010}(x)=c_{n_1+1}\varphi_{n_1+1}(x)+\ldots+c_{\nu_2}\varphi_{\nu_2}(x),\quad \sigma_{011}(x)=c_{\nu_2+1}\varphi_{\nu_2+1}(x)+\ldots+c_N\varphi_N(x);$$

ist $n_1=1$, bzw. $n_1=N-1$, dann sei $\sigma_{000}(x)\equiv\sigma_{001}(x)\equiv 0$, bzw. $\sigma_{010}(x)\equiv\sigma_{011}(x)\equiv 0$. Die Summen $\sigma_{i_1\ldots i_k}(x)$ definieren wir ähnlicherweise; wir teilen nämlich $\sigma_{i_1\ldots i_{2k}}(x)$ in zwei „ungefähr gleiche" Teile nach den Indizes $1,\ldots,N$, und wir teilen $\sigma_{i_1\ldots i_{2k+1}}(x)$ in zwei „ungefähr gleiche" Teile nach der Verteilung $c_1^2\ldots,c_N^2$.

Die folgenden Behauptungen können leicht eingesehen werden. Im Falle $k>3\log N$ gilt $\sigma_{i_1\ldots i_k}(x)\equiv 0$ für jedes $i_1,\ldots,i_k$; jedes Glied $c_k\varphi_k(x)$ gehört höchstens zu $4\left(\left[\log\frac{1}{c_k^2}\right]+1\right)$ nichtleeren Summen $\sigma_{i_1\ldots i_k}(x)$, und jede Partialsumme $c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)$ kann in der Form

$$c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)=\sigma_{i_1}(x)+\sigma_{i_1i_2}(x)+\ldots+\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}(x)$$

aufgeschrieben werden, wobei die $\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}$ an der rechten Seite kein gemeinsames Glied haben, und $k\leqq 3\log N$ ist. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhalten wir daraus

$$\left(\max_{1\leqq k\leqq N}|c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_k\varphi_k(x)|\right)^2\leqq 4\log N\sum_{k=1}^{[3\log N]}\sum_{j_1,\ldots,j_k}\sigma_{j_1\ldots j_k}^2(x),$$

wobei in der inneren Summe für jede $(j_1,\ldots,j_k)$ $(j_1,\ldots,j_k=0$, oder $1)$ zu summieren ist. Auf Grund der obigen erhalten wir daraus durch Integration die Behauptung.

3. Zum Beweis des Satzes kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\Sigma a_n^2=1$. Es sei $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ein beliebiges orthonormiertes System in [0, 1]. Ist (3) erfüllt, dann gilt $\Sigma a_n^2<\infty$. Es sei $f(x)\in L^2(0,1)$ der Limes im Quadratmittel der Partialsummen $s_n(x)$ der Reihe (2). Dann ist

$$\sum_n\int_0^1(f(x)-s_{2^n}(x))^2\,dx=\sum_n\sum_{k=2^n+1}^{\infty}a_k^2\leqq\sum_k a_k^2\log k<\infty.$$

[4]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

Daraus folgt, daß $\lim_{n\to\infty} s_{2^n}(x)=f(x)$ fast überall besteht. Nach dem Hilfssatz besteht

$$\sum_n \int_0^1 \left(\max_{2^n<k\leqq 2^{n+1}} |a_{2^n+1}\varphi_{2^n+1}(x)+\dots+a_k\varphi_k(x)|\right)^2 dx \leqq$$

$$\leqq 4\sum_n \log 2^n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2 \log \frac{a_{2^n+1}^2+\dots+a_{2^{n+1}}^2}{a_k^2} \leqq$$

$$\leqq 4\sum_n \log 2^n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2 \log \frac{1}{a_k^2} \leqq 8\sum_k \log k\cdot a_k^2 \log\frac{1}{a_k^2}<\infty.$$

Auf Grund von (3) erhalten wir

$$\delta_m(x)=\max_{2^m<k<2^{m+1}} |a_{2^n+1}\varphi_{2^n+1}(x)+\dots+a_k\varphi_k(x)|\to 0 \qquad (m\to\infty)$$

fast überall. Daraus folgt

$$|s_n(x)-s_{2^m}(x)|\leqq \delta_m(x)\to 0 \qquad (n\to\infty;\ 2^m<n<2^{m+1})$$

fast überall. Also konvergiert die Reihe (2) fast überall.

(Eingegangen am 6. April 1965)